

Un nombre irrationnel

La « proportion d'or » ou *nombre d'or*, notée Φ (initiale de Phidias), est le rapport a/b entre deux longueurs non nulles a et b (a étant la plus grande) telles que a/b soit aussi égal au rapport $(a+b)/a$ entre leur somme et la plus grande des deux.

Comme $(a+b)/a = 1+b/a$, la condition imposée à Φ s'écrit

$$\Phi = 1 + 1/\Phi.$$

En multipliant les deux membres par Φ , on voit que le nombre d'or est solution de l'équation du second degré $x^2 = x + 1$. Or, nous savons montrer depuis l'enfance¹ que celle-ci a deux solutions : $(1+\sqrt{5})/2$ et $(1-\sqrt{5})/2$; la seule des deux qui soit positive est la première², d'où

$$\Phi = (1+\sqrt{5})/2, \text{ à peu près } 1,618033988749895.$$

Puisque $\sqrt{5}$ n'est pas une fraction³, Φ n'en est pas une non plus : c'est un nombre *irrationnel*⁴.

Mais moins irrationnel que ceux qui en parlent ?

À ma sortie de l'École, retenu un an comme professeur de mathématiques « spéciales », j'ai absorbé chez un de mes collègues⁵ un canard rasé au lieu d'être plumé, tout en conversant *très* longuement sur les mérites comparés du tout nouveau format de papier $21 \times 29,7$ – alias A4 – et de l'ancien, 21×27 . Mon collègue regrettait ce dernier⁶, « plus proche du nombre d'or » ; cela montre qu'un scientifique peut se tromper (on a $27/21 < 29,7/21 < \Phi$) mais aussi que, même chez ceux à qui en principe *on ne la fait pas*, le nombre d'or était chargé d'une valeur culturelle, voire mystique.

Mon collègue n'était pas seul dans ce cas. Ainsi, Béla Bartók a pris soin que, dans sa *Musique pour cordes, percussions et célesta*, le point culminant de la magnifique fugue initiale se situe aux $5/8$ du mouvement, proportion proche de la *section d'or* $1/\Phi$ – alias $\Phi - 1$. De même, le rapport entre le nombre total de croches de sa *Sonate pour deux pianos et percussion* et le

¹ Petite piqure de rappel : comme $(x-1/2)^2 = x^2 - x + 1/4$, l'équation s'écrit $(x-1/2)^2 = 5/4$.

² Puisque 5 est plus grand que 1, il en va de même de sa racine carrée $\sqrt{5}$.

³ Dans le cas contraire, $\sqrt{5}$ serait le quotient p/q de deux nombres entiers positifs. La relation $p^2 = 5q^2$ entraînerait alors que p est divisible par 5, $p = 5p_1$ avec p_1 entier positif, d'où $q^2 = 5p_1^2$, donc $q = 5q_1$ avec q_1 entier positif et par conséquent $p_1 = 5p_2$ avec p_2 entier positif, etc. On obtiendrait ainsi de proche en proche une suite *infinie* $p > p_1 > p_2 > \dots > p_n > \dots$ d'entiers strictement positifs, ce qui est impossible car une telle suite s'arrête au bout d'au plus $p - 1$ étapes. La même remarque (pour $\sqrt{2}$) semble avoir été à l'origine du suicide (?) d'un élève de Pythagore, les nombres irrationnels n'ayant pas très bonne presse en ce temps-là.

⁴ *Très* irrationnel, voir l'appendice.

⁵ Avec ma pas encore femme, qu'en ces temps et lieux reculés on appelait donc ma *danseuse*.

⁶ Je n'ai pu m'empêcher de défendre le nouveau format, bien adapté à la fabrication de papier hygiénique.

nombre de croches du premier mouvement est $8/5$, proche du nombre d'or⁷ ; la durée totale de l'œuvre, elle, est le double de celle de son premier mouvement.

Curieux écho d'un phénomène popularisé par Léonard de Vinci suivant Vitruve : notre nombril, centre de gravité approximatif de notre corps (ce qui impose aux balustrades garde-corps d'être plus hautes), se situe à peu près à la section d'or de notre hauteur.

Le nombre d'or joue donc dans ces œuvres un rôle structurant, plus ou moins repérable à l'audition. Je ne crois pas qu'il explique leur beauté, en tout cas il ne lui nuit pas...

Le fétichisme du nombre d'or provient largement de l'architecture, où Le Corbusier en a assuré la promotion. Il s'appuyait sur une longue histoire qui commence au moins avec les proportions du Parthénon, voire de la Pyramide de Khéops ; mais surtout sur l'idée, développée avec l'intransigeance propre au personnage, d'une architecture littéralement à visage humain : les proportions intervenant en architecture doivent être celles de l'être humain, exprimées par le fameux dessin de Vitruve/Vinci – libre au mécréant d'y voir du *nombrilisme*.

En guise de conclusion. Désireux d'être bref, j'épargne au lecteur la phyllotaxie, les choux romanesco et les arguments pas tout à fait dénués de fondement qu'en tirent les amateurs de *fractales* et les zéloteurs du nombre d'or. Loin de moi l'idée de nier le caractère harmonieux de celui-ci et de vilipender les très grands artistes qui tout au long de l'Histoire en ont fait usage.

En revanche, dans un monde où, pour le meilleur et pour le pire, les mathématiques jouent un rôle de plus en plus grand, il me semble consternant d'en sacrifier une infime partie tout en ignorant superbement le reste⁸. On souffre en entendant un spécialiste reconnu des couleurs dénigrer le prisme de Newton sous des prétextes fallacieux. Ou en lisant les références actuelles à une « harmonie des sphères » qui, contrairement à la résonance naturelle, a été invalidée depuis longtemps par l'observation. Comment maîtriser les progrès de la Science si on les nie ?

Appendice : le nombre d'or est très irrationnel

La relation $\Phi = 1 + 1/\Phi$ donne par itération

$$\Phi = 1 + 1/(1 + 1/\Phi) = 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/\Phi)) = \text{etc.}$$

Il n'est pas trop difficile de voir qu'en faisant tendre vers l'infini le nombre d'itérations dans cette suite d'identités on obtient le « développement (infini) en fraction continuée » de Φ :

$$\Phi = 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + \text{etc.}))))),$$

où Φ n'apparaît plus dans le second membre. La signification de cette « écriture » infinie est que le nombre d'or est la limite d'une suite de fractions, en jargon mathématique ses *réduites*, obtenues en arrêtant le « etc. » de cette mystérieuse formule⁹ au bout d'un nombre fini d'opérations.

Ces réduites se calculent facilement : $\Phi_0 = 1$, $\Phi_1 = 1 + 1/\Phi_0 = 2$, $\Phi_2 = 1 + 1/\Phi_1 = 3/2 (= 1,5)$, $\Phi_3 = 1 + 1/\Phi_2 = 5/3$ (environ 1,67), $\Phi_4 = 1 + 1/\Phi_3 = 8/5 (= 1,6)$, $\Phi_5 = 1 + 1/\Phi_4 = 13/8 (=$

⁷ En fait $8/5 = 1,6$ est la quatrième « réduite » Φ_4 de Φ , voir l'appendice.

⁸ Par exemple les extraordinaires progrès dans le traitement des données qui ont permis, du côté du meilleur, un accès au savoir sans précédent et, du côté du pire, la reconnaissance faciale de deux milliards de Chinois et plus généralement la perte de toute intimité, pas seulement en Chine.

⁹ Guère plus que la formule $1/3 = 0,333333\text{etc.}$

1,625), $\Phi_6 = 1 + 1/\Phi_5 = 21/13$ (environ 1,615), $\Phi_7 = 1 + 1/\Phi_6 = 34/21$ (environ 1,6191), $\Phi_8 = 1 + 1/\Phi_7 = 55/34$ (environ 1,6176), $\Phi_9 = 1 + 1/\Phi_8 = 89/55$ (environ 1,6182), $\Phi_{10} = 1 + 1/\Phi_9 = 144/89$ (environ 1,6180), $\Phi_{11} = 1 + 1/\Phi_{10} = 233/144$ (environ 1,61806), $\Phi_{12} = 1 + 1/\Phi_{11} = 377/233$ (environ 1,61803), etc. On voit qu'elles tendent certes vers Φ mais vraiment sans se presser : en ce sens, le nombre d'or est aussi mal approché que possible par les nombres rationnels (fractions), bref très irrationnel.